

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

---

УДК 535.42;517.9

**А. В. БОРОВСКИЙ**

*доктор физико-математических наук, профессор,  
Байкальский государственный университет экономики и права*

**А. Л. ГАЛКИН**

*доктор физико-математических наук,  
Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова*

## ДВУМЕРНЫЕ РАСЧЕТЫ ДИФРАКЦИИ НА КЛИНЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ

---

Анализируются различные представления решения задачи дифракции на клине. Показано, что одномерные и двумерные расчеты интенсивности и комплексной амплитуды электрического и магнитного полей для краевой задачи дифракции плоской ТЕ и ТМ волны на идеально проводящем клине с произвольным углом при вершине можно провести с помощью прямого численного суммирования рядов Фурье-Бесселя для дифракционных интегралов. Проведено сравнение решений задачи дифракции на клине в рамках строгого подхода, использующего стационарное волновое уравнение, и приближенного подхода, использующего параболическое уравнение для комплексной амплитуды дифракционной функции. Исследованы некоторые свойства дифракционных интегралов. Установлены отличия дифракционных интегралов в параболическом приближении и в строгой волновой постановке. Произведено вычисление дифракционных интегралов в нуле и при больших значениях радиуса.

*Ключевые слова:* дифракция; плоские ТЕ и ТМ волн; идеально проводящий клин.

---

**A. V. BOROVSKY**

*Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor,  
Baikal State University of Economics and Law*

**A. L. GALKIN**

*Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor,  
General Physics Institute of RAS n. a. A. M. Prokhorov*

## TWO-DIMENSIONAL CALCULATIONS OF DIFFRACTION BY A WEDGE WITH AN ARBITRARY ANGLE

---

The paper analyzes different approaches to solution of the problems of diffraction by a wedge. It is shown that one- and two-dimensional calculations of intensity and complex amplitude of electric and magnetic fields for the boundary value problem of flat TE and TM waves diffraction by a perfectly conducting wedge with an arbitrary angle at the vertex can be conducted with the help of direct numerical summing of Fourier-Bessel series for diffraction integrals. The author compares two solutions of the problem of diffraction by a wedge: the one achieved under the strict approach implying the usage of the stationary wave equation, and the other based on the approximate approach implying the usage of the parabolic equation for the complex amplitude of the diffraction function. Some characteristics of the diffraction function are studied. The differences of the diffraction integrals in the parabolic approximation and the rigorous formulation of the wave are defined. The calculation of the diffraction integrals at zero point and at large radial distance is provided.

*Keywords:* diffraction; flat TE and TM waves; perfectly conducting wedge.

---

Задача дифракции рассматривается уже больше 100 лет, но до сих пор в этой области имеются нерешенные проблемы. Фундаментальный характер носит исследование задачи дифракции на клине. Решение этой проблемы можно найти в трудах [3; 7; 10; 12; 23; 27; 28].

Известны обобщения двумерной задачи дифракции на клине на трехмерный случай [2], на случай «скользящего» клина в акустике [1], на случай импедансных (поглощающих) граничных условий в радиофизике и оптике [11; 14; 17; 18; 20; 23]. Однако даже в клас-

сической двумерной постановке остаются вопросы, связанные с описанием отражений от обеих граней клина и соотношением различных представлений (и приближений) решения при произвольных значениях угла раствора клина. В курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и С.М. Лифшица [15] дана постановка задачи дифракции на клине, однако ее решение отсутствует, что также свидетельствует о незавершенности исследований.

В рамках задачи дифракции изучается распространение электромагнитного поля в пространстве в присутствии идеально проводящего тела. Примерами таких тел являются шар, эллипсоид, параболоид, конус. Особый интерес представляет рассмотрение идеально-проводящего клина. В предельных случаях клин вырождается в полуплоскость или прямоугольную ступеньку. Эти обе конфигурации часто встречаются в оптических приборах в виде металлических диафрагм и оправ. Необходимость точно рассчитывать параметры оптических устройств обуславливает практический интерес к данной теме.

Актуальность настоящего исследования обусловлена и необходимостью создания эффективных алгоритмов для прогнозирования параметров радиомаячных систем [13], применяемых в системах управления заходом воздушного судна на посадку по заданному рельефу местности, который во многих случаях имеет форму клина, что и приводит к задаче дифракции волн на клине. В настоящее время разработка антенн, радаров, систем мобильной радиосвязи продолжают стимулировать изучение дифракции на клине. Идеи физической теории дифракции в сочетании с численными методами применяются в различ-

ных гибридных подходах для решения сложных задач излучения и рассеяния [25]. Интерес к проблеме связан также с возможностью строгого решения уравнений Максвелла в пространстве в присутствии физического тела. В свободном пространстве уравнения Максвелла сводятся к волновому уравнению, в стационарном случае последнее известно как уравнение Гельмгольца. Таким образом, мы имеем строгую физическую задачу, описывающую реальные объекты. Это редко встречающееся уникальное обстоятельство, которое повышает интерес к рассматриваемой задаче.

Целью данной работы является на основе решения задачи дифракции, учитывающего отражения от обеих граней клина, изучить соотношение различных представлений (и приближений) решения при различных значениях угла раствора клина, а также анализ поля интенсивности для дифрагирующей электромагнитной волны.

Рассмотрим клин с углом при вершине  $\delta < \pi$  (рис. 1). На клин падает внешняя плоская электромагнитная волна, характеризуемая волновым вектором  $\mathbf{k}$ . В полярной системе координат вектор  $\mathbf{k}$  задается модулем  $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны, и полярным углом  $\alpha$  (часто решение выглядит проще, если использовать угол Зоммерфельда  $\gamma = \alpha - \pi$ ). Точка наблюдения задается модулем радиус-вектора  $r = |\mathbf{r}|$  и полярным углом  $\varphi$ .

Произвольное электромагнитное поле в двумерной задаче можно представить в виде линейной суперпозиции полей, обладающих TE (transverse electric) и TM (transverse magnetic) поляризациями [3]. Имеется в виду поперечность электрического или магнитного вектора плоскости падения волны, образован-

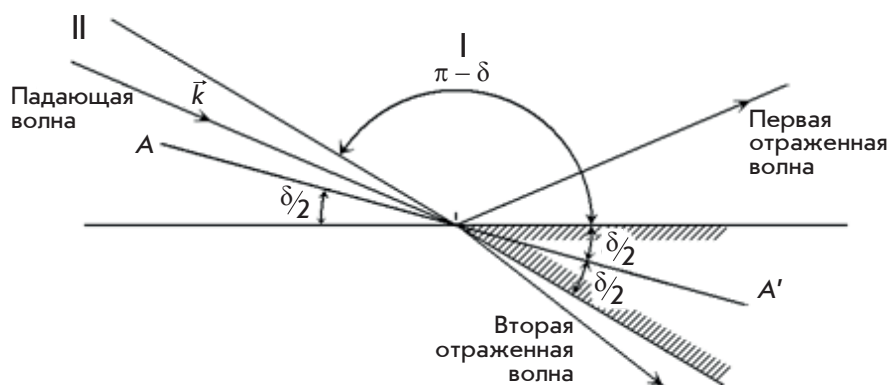


Рис. 1. Геометрическая картина дифракции плоской волны на проводящем клине в области двух отражений

ной волновым вектором и перпендикуляром к поверхности отражения. Поэтому особый интерес представляет исследование дифракции электромагнитного поля, обладающего этими двумя поляризациями. В случае ТЕ волны действительный вектор напряженности электрического поля, параллельный краю клина, определяется выражением

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U(\mathbf{r})e^{i\omega t}]. \quad (1)$$

В случае ТМ волны действительный вектор магнитного поля параллелен краю клина

$$H(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U(\mathbf{r})e^{i\omega t}]. \quad (2)$$

В приведенных выражениях  $U(\mathbf{r})$  является комплексной амплитудой электрического (ТЕ) или магнитного (ТМ) полей. При этом функция  $U(\mathbf{r})$  — решение двумерной краевой задачи для уравнения Гельмгольца в секторе. Последнее имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + U = 0, \quad \rho = kr. \quad (3)$$

Решение ищется в области углов  $0 < \varphi < 2\pi - \delta$  при любых значениях радиуса  $0 < \rho < \infty$ . На поверхностях клина ставится условие равенства нулю решения (условие I рода, для ТЕ волны), либо его производной по углу  $\varphi$  (условие II рода для ТМ волны)

$$U|_{\varphi=0, \varphi=2\pi-\delta} = 0 \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0, \varphi=2\pi-\delta} = 0 \right). \quad (4)$$

Существует также класс импедансных граничных условий, когда приравнивается нулю линейная комбинация функции и ее производной [14; 17; 18; 20; 23]. Далее рассмотрим условия вида (4).

В силу линейности уравнения Гельмгольца решение краевой задачи можно разложить на сумму решений геометрической оптики и дифракционной составляющей

$$U = U_g + U_d. \quad (5)$$

Выражение для комплексной амплитуды падающей плоской волны в полярных координатах [3; 12; 27] имеет вид

$$U_g^+(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos \theta), \quad \theta = \varphi - \gamma.$$

Отраженная волна геометрической оптики от верхней грани клина записывается в виде

$$U_g^-(\rho, \theta) = \exp(i(\pi + \rho \cos \theta)) = -\exp(i\rho \cos \theta),$$

$$\theta = \varphi + \gamma.$$

Поэтому геометрическое решение в зоне одного отражения принимает следующий вид

$$U_g = \exp(i\rho \cos(\varphi - \gamma)) - \exp(i\rho \cos(\varphi + \gamma)).$$

Уравнение (3) имеет особые точки  $\rho = 0; \infty$ , поэтому для выполнения условий теоремы единственности для решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с источниками волн на бесконечности на решение  $U$  ставятся интегральные условия Мейкснера и Зоммерфельда [17]:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \rho \int_0^{2\pi-\delta} \text{Im} \left( U^* \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) d\varphi \right\} = 0; \quad (6)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \rho \int_0^{2\pi-\delta} \left| \frac{\partial U}{\partial \rho} - iU \right|^2 d\varphi \right\} = 0. \quad (7)$$

В задаче дифракции плоской волны на клине можно выделить три области углов падения плоской волны  $\gamma$ : в первой ( $0 < \gamma < \pi - \delta$ ) имеется одно отражение от верхней грани клина; во второй ( $\pi - \delta < \gamma < \pi$ ) — два отражения от обеих граней клина и в третьей ( $\pi < \gamma < 2\pi - \delta$ ) — одно отражение от нижней грани клина. Получение решения краевой задачи, учитывающей все три области углов падения исходной волны, отличается значительной сложностью.

Метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца в секторе восходит к трудам А. Зоммерфельда [12; 28]. Частными решениями двумерного уравнения Гельмгольца являются плоские или цилиндрические волны, а также их линейные суперпозиции. Эти частные решения записываются в виде контурных интегралов в плоскости комплекснозначных углов. Контурные интегралы по контурам  $C$  и  $D$ , определяемым аналогично [12; 27], получили название контурных интегралов Зоммерфельда-Франка-Мизеса (ЗФМ). На бесконечности они превращаются в плоские или цилиндрические волны, в нуле ограничены. Из двух контурных интегралов можно сконструировать решение задачи Дирихле (вычитанием) или Неймана (сложением), причем сумма и разность интегралов, являющиеся решением краевой задачи для уравнения Гельмгольца в секторе, удовлетворяют условиям Мейкснера в нуле. Исследованию контурных интегралов ЗФМ посвящены, например, работы [4; 6].

Контурные интегралы с индексом  $C$  являются четными, непрерывными, гладкими

функциями, обладающими периодом  $T = 2\pi\rho$ , где действительное число  $\rho$  следующим образом связано с углом при вершине клина  $\rho = ((2\pi - \delta))/\pi$ . Для них справедливо представление в виде ряда Фурье-Бесселя [6; 27]

$$U_\rho^C(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} J_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\rho} \exp\left(i \frac{\pi k}{2\rho}\right) \cos\left(\frac{k}{\rho}\theta\right) J_{k/\rho}(\rho). \quad (8)$$

Контурные интегралы с индексом  $D$  являются четными, кусочно-непрерывными функциями, также обладающими периодом  $T = 2\pi\rho$ . На основе свойства связи они получают вычитанием плоской волны

$$U_\rho^D(\rho, \theta) = U_\rho^C(\rho, \theta) - e^{i\rho\cos\theta} \Phi(\pi - |\theta|);$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0. \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Функция Хэвисайда не является периодической, поэтому представление (9) справедливо только в пределах основного периода  $|\theta| \leq T/2$ . Для того, чтобы использовать функцию  $U_\rho^D(\rho, \theta)$  в более широком диапазоне углов, ее следует периодически продолжить за область основного периода.

Представление дифракционного интеграла  $U_\rho^C(\rho, \theta)$  при целочисленных значениях  $\rho = (2\pi - \delta)/\pi = n$  получается непосредственно из контурного интеграла с помощью следующих лемм.

Лемма 1. Центральное тождество теории дифракции для клина в случае целых  $\rho = n > 1$ .

В области периодичности  $|\theta| < \pi n$  функции

$$\cos\left(\theta\left(1 - \frac{m}{n}\right)\right), \quad m \leq n-1$$

выполняется тождество

$$1 + \sum_{m=1}^{n-1} \cos\left(\theta\left(1 - \frac{m}{n}\right)\right) \exp\left(-i \frac{\pi m}{2n}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) \int_0^\infty \exp(-i\xi \cos\theta) H_{m/n}^{(2)}(\xi) d\xi \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} n, & |\theta| < \pi \\ \frac{n+1}{2}, & |\theta| = \pi. \\ 0, & |\theta| > \pi \end{cases}$$

Лемма 2. Дифракционный интеграл Зоммерфельда-Франка-Мизеса для случая целых  $\rho = n > 1$  может быть представлен в виде

$$U_n^C(\rho, \theta) = \exp(i\rho\cos\theta) \times$$

$$\times \frac{1}{n} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{n-1} \cos\left(\theta\left(1 - \frac{m}{n}\right)\right) \exp\left(-i \frac{\pi m}{2n}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) \int_0^\rho e^{-i\xi \cos\theta} H_{m/n}^{(2)}(\xi) d\xi \right]; \quad (10)$$

$$U_n^C(0) = \frac{1}{n},$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} U_n^C(\rho, \theta) = \begin{cases} \exp(i\rho\cos\theta), & |\theta| < \pi \\ 0, & |\theta| > \pi \end{cases}$$

где  $H_{m/n}^{(2)}$  — функция Ханкеля второго рода с дробным индексом. Доказательство лемм проведено в работе [6].

В задаче дифракции на клине угол при вершине клина меняется в пределах  $0 \leq \delta \leq \pi$ , число  $\rho = ((2\pi - \delta))/\pi$  лежит в диапазоне  $1 \leq \rho \leq 2$ , в котором целым значениям соответствуют две конфигурации клина:  $\rho = 1$  ( $\delta = \pi$ ) — клин, развернутый в плоскость;  $\rho = 2$  ( $\delta = 0$ ) — полуплоскость. Кроме того, выражение (10) может быть использовано для описания тех случаев, когда число  $\rho = l/k$  относится к множеству рациональных чисел из отрезка  $1 \leq \rho \leq 2$ . В этом случае следует выбрать дифракционный интеграл  $U_l^C(\rho, \theta)$  с индексом  $l$ , имеющий период  $T = 2\pi l$ , и применить к нему теорему о понижении периода [4], которая позволяет построить дифракционный интеграл с периодом  $T = 2\pi l/k$ :

$$U_{l/k}^C(\rho, \theta) = \sum_{i=0}^{k-1} U_l^C\left(\rho, \theta + \frac{2\pi i}{k}\right).$$

Например, для важного в практическом отношении случая прямоугольного клина  $\rho = 3/2$  ( $\delta = \pi/2$ ) дифракционный интеграл с периодом  $T = 2\pi\rho = 3\pi$  можно получить из дифракционного интеграла с  $n = 3$ ,  $T = 2\pi n = 6\pi$ , понижая период в два раза. В литературе неоднократно исследовались случаи  $\rho = 1, 2$  с использованием различных приближений, что приводило к разночтениям [3; 10; 12; 25; 27].

Интегральные представления дифракционного интеграла  $U_\rho^D(\rho, \theta)$  при произвольных значениях  $\rho = (2\pi - \delta)/\pi$  также получаются из контурного интеграла с помощью лемм 3 и 4.

Лемма 3. Дифракционный интеграл  $U_p^D(\rho, \theta)$  может быть представлен в виде

$$U_p^D(\rho, \theta) = -\frac{2}{\pi\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k}{\rho}\theta\right) \times \sin\left(\frac{\pi k}{\rho}\right) \int_0^{\infty} \exp\left[-i\rho ch(\mu) - \frac{k}{\rho}\mu\right] d\mu. \quad (11)$$

Лемма 4. Дифракционный интеграл может быть представлен в виде

$$U_p^D(\rho, \theta) = -\frac{1}{2\pi\rho_0} \int_0^{\infty} d\mu \exp[-i\rho ch(\mu)] \times \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi+\theta}{\rho}\right)}{ch\left(\frac{\mu}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{\pi+\theta}{\rho}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{\rho}\right)}{ch\left(\frac{\mu}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{\pi-\theta}{\rho}\right)} \right], \quad (12)$$

или

$$U_p^D(\rho, \theta) = -\frac{1}{\pi\rho_0} \int_0^{\infty} d\mu \exp\left[-i\rho ch(\mu) - \frac{\mu}{\rho}\right] \times \left[ \frac{\sin\left(\frac{\theta+\pi}{\rho}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{\mu}{\rho}\right) \cos\left(\frac{\theta+\pi}{\rho}\right) + \exp\left(-\frac{2\mu}{\rho}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{\rho}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{\mu}{\rho}\right) \cos\left(\frac{\pi-\theta}{\rho}\right) + \exp\left(-\frac{2\mu}{\rho}\right)} \right].$$

Вид (12) получается из выражения (11) в результате суммирования ряда. Доказательства приведены в [6].

Решение краевой задачи дифракции для клина с произвольным углом при вершине принимает следующий вид, включая случай целых  $\rho = n$ :

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = U_p^C(\rho, \varphi - \gamma) \mp U_p^C(\rho, \varphi + \gamma). \quad (13)$$

Решение справедливо при произвольных углах падения плоской волны на клин, верхний знак соответствует крайевым условиям первого рода, нижний знак — крайевым условиям второго рода. Соотношение (13) охватывает три физически различные области отражения плоской волны от клина:

–  $0 < \gamma < \pi - \delta$  — область однократного отражения от верхней грани клина, имеется две волны геометрической оптики — падающая и отраженная от верхней грани;

–  $\pi - \delta < \gamma < \pi$  — область двукратного отражения от верхней и нижней граней клина, имеются три волны геометрической оптики — падающая и две отраженных;

–  $\pi < \gamma < 2\pi - \delta$  — область однократного отражения от нижней грани клина.

Решение (13) краевой задачи (4), (6), (7) для уравнения Гельмгольца (3) единственно вследствие выполнения теорем единственности для уравнений эллиптического типа в неограниченных областях с условиями излучения на бесконечности и условием Мейкснера вблизи ребра клина [8; 9; 17; 24].

В работах [16; 19; 21; 25; 26] рассмотрены задачи теории дифракции в рамках параболического приближения. Представляет интерес сравнить приближенное и строгое решения для клина. В параболическом приближении решение краевой задачи в секторе [25] ищут в виде, аналогичном выражению (5):

$$U = U_g + W_d,$$

где  $U_g$  остается без изменений, а медленная комплексная амплитуда, выделенная из величины  $W_d$ , удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + 2i\rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} + i\rho W = 0, \quad (14)$$

$$W_d(\rho, \varphi) = e^{i\rho} W(\rho, \varphi).$$

Краевые условия остаются прежними (4). Вместо условия Зоммерфельда на бесконечности (6) используют условие Мейкснера в нуле (7). Дифракционная часть находится в виде дифракционного интеграла, удовлетворяющего обоим условиям (6), (7). Краевую задачу (4), (7), (14) на величину  $W_d$  решают методом разделения переменных в области одного отражения от верхней грани клина. Уравнение (14) приводит к радиальному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. В параболическом приближении решение [25] можно представить в виде

$$W_d(\rho, \varphi, \gamma) = W_p^D(\rho, \varphi - \gamma) - W_p^D(\rho, \varphi + \gamma); \quad (15)$$



$$W_p^D(\rho, \theta) = \frac{2e^{i\rho}}{i\pi\rho} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \frac{s\pi}{\rho} \cos \frac{s\theta}{\rho} e^{\frac{is^2}{2\rho\rho^2}} \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{1}{2} - C_1 \left( \frac{k}{\rho\sqrt{2\rho}} \right) \right) - i \left( \frac{1}{2} - S_1 \left( \frac{k}{\rho\sqrt{2\rho}} \right) \right) \right].$$

Здесь введены интегралы Френеля

$$C_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \cos(t^2) dt;$$

$$S_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \sin(t^2) dt.$$

Решение (15) естественно назвать рядом Фурье-Френеля. Выражения в квадратных скобках стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Наличие выражения в квадратной скобке обеспечивает сходимость ряда.

Таким образом, из решения краевой задачи в области одного отражения восстанавливается дифракционный интеграл  $W_p^D(\rho, \theta)$ . Последний является периодической, четной, кусочно-непрерывной функцией. Основной период интеграла  $-T/2 < \theta < T/2$ ,  $T = 2\pi\rho = 2(2\pi - \delta)$ . Разрывы функции  $W_p^D(\rho, \theta)$  возникают в точках  $|\theta| = \pi$  и связаны с вычитанием плоской волны из непрерывного гладкого решения (9).

Отметим, что, используя периодическую функцию  $W_p^D(\rho, \theta)$ , можно восстановить непрерывную функцию

$$U_p^C(\rho, \theta) = W_p^D(\rho, \theta) + e^{i\rho\cos\theta} \Phi(\pi - |\theta|). \quad (16)$$

Поскольку функция Хэвисайда  $\Phi(x)$  не является периодической, то (16) восстанавливается на основном периоде  $-T/2 < \theta < T/2$ . Далее, применив функцию периодического продолжения, найдем периодическую непрерывную функцию  $U_p^C(\rho, \theta)$ . Используя последнюю, получаем приближенное решение краевой задачи (4), (7), (14) при произвольных углах  $0 < \varphi, \gamma < T/2$ . Таким образом, извлекая дифракционный интеграл из решения, приведенного в [25], можно построить решение для произвольных углов падения плоской волны на клин.

Смысл параболического приближения наиболее полно иллюстрируют интегральные представления дифракционных интегралов (12) и (15). В параболическом приближении интеграл (15) преобразуется к следующему виду:

$$W_p^D(\rho, \theta) = -\frac{1}{\pi\rho} \int_0^{\infty} d\mu \exp \left[ -i\rho \left( 1 + \frac{\mu^2}{2} \right) - \frac{\mu}{\rho} \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sin \left( \frac{\theta + \pi}{\rho} \right)}{1 - 2\exp \left( -\frac{\mu}{\rho} \right) \cos \left( \frac{\theta + \pi}{\rho} \right) + \exp \left( -\frac{2\mu}{\rho} \right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \left( \frac{\pi - \theta}{\rho} \right)}{1 - 2\exp \left( -\frac{\mu}{\rho} \right) \cos \left( \frac{\pi - \theta}{\rho} \right) + \exp \left( -\frac{2\mu}{\rho} \right)} \right\}. \quad (17)$$

Сравнение выражений (12) и (17) показывает, что гиперболический косинус в мнимой экспоненте под знаком интеграла в строгом решении заменяется на первые два слагаемых своего разложения в нуле

$$ch(\mu) \rightarrow 1 + \frac{\mu^2}{2}.$$

Можно также показать, что (12) и (17) приводятся к контурным интегралам в форме Малюжинца [25]. Используя интегральные представления (12) и (17), можно вычислить значения дифракционных интегралов в нуле  $\rho = 0$ , которые, как видим, в обоих случаях совпадают

$$U_p^D(0) = W_p^D(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\mu \exp \left( -\frac{\mu}{\rho} \right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sin \left( \frac{\theta + \pi}{\rho} \right)}{1 - 2\exp \left( -\frac{\mu}{\rho} \right) \cos \left( \frac{\theta + \pi}{\rho} \right) + \exp \left( -\frac{2\mu}{\rho} \right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \left( \frac{\pi - \theta}{\rho} \right)}{1 - 2\exp \left( -\frac{\mu}{\rho} \right) \cos \left( \frac{\pi - \theta}{\rho} \right) + \exp \left( -\frac{2\mu}{\rho} \right)} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{ctg} \frac{\theta + \pi}{\rho} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \frac{\theta + \pi}{2\rho} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \pi}{\rho} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \frac{\theta - \pi}{2\rho}.$$

Раскрытие обратных тригонометрических функций в пределах основного периода  $|\theta| < \pi\rho, \rho > 1$  приводит к выражению

$$U_p^D(0) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} - 1, & |\theta| < \pi, \\ \frac{1}{\rho}, & |\theta| > \pi. \end{cases}$$

Вычитание единицы в области  $|\theta| < \pi$  обусловлено вычитанием плоской волны в уравнении (9).

Асимптотики интегральных представлений дифракционных интегралов (12) и (17) при  $\rho \rightarrow \infty$  могут быть вычислены методом Лапласа [22] с корректировкой в числовом коэффициенте, обусловленной нахождением максимума подынтегральной функции в крайней точке интервала интегрирования [6]:

$$U_p^D(\rho), W_p^D(\rho) \rightarrow \exp\left(-i\left(\rho + \frac{\pi}{4}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \times \left( \frac{\frac{1}{\rho} \sin\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{\rho}\right)} \right).$$

Обе асимптотики совпадают. Отметим, что в работе [21] приведены асимптотики решений краевой задачи, причем равномерно сходящиеся.

Решение уравнения Гельмгольца  $U(\rho, \varphi, \gamma)$  связано со значением электрического или магнитного поля электромагнитной волны соотношениями (1)–(2). Напряженность оптического поля, которая колеблется с частотой  $10^{12-14} \text{с}^{-1}$ , при наблюдениях на интервалах времени, существенно превышающих период колебаний, равна нулю. Отличны от нуля только средние значения от квадратичных комбинаций. Поэтому наблюдаемой величиной в оптике является интенсивность излучения.

Усреднив по быстрым осцилляциям вектор Пойнтинга, получим следующее выражение для интенсивности электромагнитной ТЕ или ТМ волны [5; 6]:

$$I = \left\{ \frac{1}{\rho^2} \left[ \text{Re}U \frac{\partial \text{Im}U}{\partial \varphi} - \text{Im}U \frac{\partial \text{Re}U}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[ \text{Re}U \frac{\partial \text{Im}U}{\partial \rho} - \text{Im}U \frac{\partial \text{Re}U}{\partial \rho} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (18)$$

Выражение (18) нормировано на интенсивность падающей плоской волны, его суще-

ственной особенностью является то, что оно не зависит от знака мнимой части функции  $U$ .

Представляет также интерес привести выражение для интенсивности дифрагировавшей волны для случая, когда падающая волна представляет собой суперпозицию ТЕ и ТМ волн. Существенно, что при вычислении вектора Пойнтинга комбинации компонент для ТЕ и ТМ волн не пересекаются, поэтому, проделав выкладки, аналогичные [5; 6], получим

$$I = |S| = \left\{ \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \text{Re}F \frac{\partial \text{Im}F}{\partial \varphi} - \text{Im}F \frac{\partial \text{Re}F}{\partial \varphi} \right) + \sigma \left( \text{Re}G \frac{\partial \text{Im}G}{\partial \varphi} - \text{Im}G \frac{\partial \text{Re}G}{\partial \varphi} \right) \right]^2 + \left[ \left( \text{Re}F \frac{\partial \text{Im}F}{\partial \rho} - \text{Im}F \frac{\partial \text{Re}F}{\partial \rho} \right) + \sigma \left( \text{Re}G \frac{\partial \text{Im}G}{\partial \rho} - \text{Im}G \frac{\partial \text{Re}G}{\partial \rho} \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (19)$$

$$\sigma = I_{TM} / I_{TE}.$$

Здесь  $F$  и  $G$  означают решения краевых задач для комплексных амплитуд ТЕ и ТМ волн по отдельности. Интенсивность нормирована на «интенсивность ТЕ волны», которая существовала бы в отсутствии ТМ волны. Выражения (18)–(19) для интенсивности применимы для светового поля, для интенсивности звукового поля в работе [21] используется квадрат модуля амплитуды. Как показывают расчеты, эти две характеристики заметно различаются.

При рассмотрении задачи дифракции на прямоугольном клине исходным является дифракционный интеграл с периодом  $6\pi$ . Для него целочисленный индекс принимает значение  $n = 3$ . Выражение для дифракционного интеграла в этом случае

$$U_3^C(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos \theta) \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) \right] \times \cos\left(\frac{2}{3}\theta\right) \int_0^\rho \exp(-i\xi \cos \theta) H_{1/3}^{(2)}(\xi) d\xi + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) \int_0^\rho \exp(-i\xi \cos \theta) H_{2/3}^{(2)}(\xi) d\xi \quad (20)$$

Решение уравнения Гельмгольца для случая клина с прямым углом строится с применением теоремы о понижении периода. Период интеграла (20) понижается с  $6\pi$  до  $3\pi$ . Окончательное строгое решение для задачи дифракции на прямоугольном клине имеет вид

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = [U_3^C(\rho, \varphi - \gamma) - U_3^C(\rho, \varphi + \gamma)]_1 + [U_3^C(\rho, 3\pi + (\varphi - \gamma)) - U_3^C(\rho, 3\pi + (\varphi + \gamma))]_2.$$

Формулы модели представляют значительную сложность для вычислений. Функция Ханкеля в мнимой части имеет особенность в нуле. Поэтому формулы модели содержат несобственные в нуле интегралы от осциллирующих функций. При численном решении для построения интерполяционных функций (используются средства пакета «Математика») на интервале  $[\varepsilon, 1]$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$  применяется линейная интерполяция на логарифмической сетке  $\{m10^{-k}\}$ ,  $m = 1, 2, \dots, 9$ ;  $k = 0, 1, \dots, 7$ . Для определения производных, входящих в выражение (18) для интенсивности, используется дифференцирование по  $\varphi$  численного решения при фиксированном  $\rho$ , производные по  $\rho$  определяются как центральные разности по двум разнесенным слоям.

На рис. 2 показаны угловые распределения интенсивности ТЕ и ТМ волн для значений  $\rho = 50$ ;  $\gamma = \pi / 2 - 0,05$ . Угол падения исходной волны здесь близок к вертикальному углу. Особенностью ТМ волны является то, что амплитуда поля и его интенсивность не обращаются в ноль на поверхности клина. В области углов  $0 < \varphi < \pi - \gamma$  возникает эффект интерференции между волнами, падающей и отраженной от верхней грани клина. Эти волны гасят друг друга, что проявляется в малых значениях интенсивности в этой зоне. В области углов  $\pi - \gamma < \varphi < \pi + \gamma$  имеется только падающая (она же прошедшая) волна. Эта волна возмущена эффектом дифракции, что проявляется в наличии (см. рис. 2) дифракционных максимумов и минимумов. Эффект дифракции для ТМ волны слабо выражен, что связано с малым перепадом поля у вертикальной стенки ступеньки. В области углов  $\pi + \gamma < \varphi < 3\pi/2$  возникает геометрическая тень. Однако эта область углов (см. рис. 2б) заполнена диффундировавшим туда полем, что снижает силу эффекта дифракции для ТМ волны.

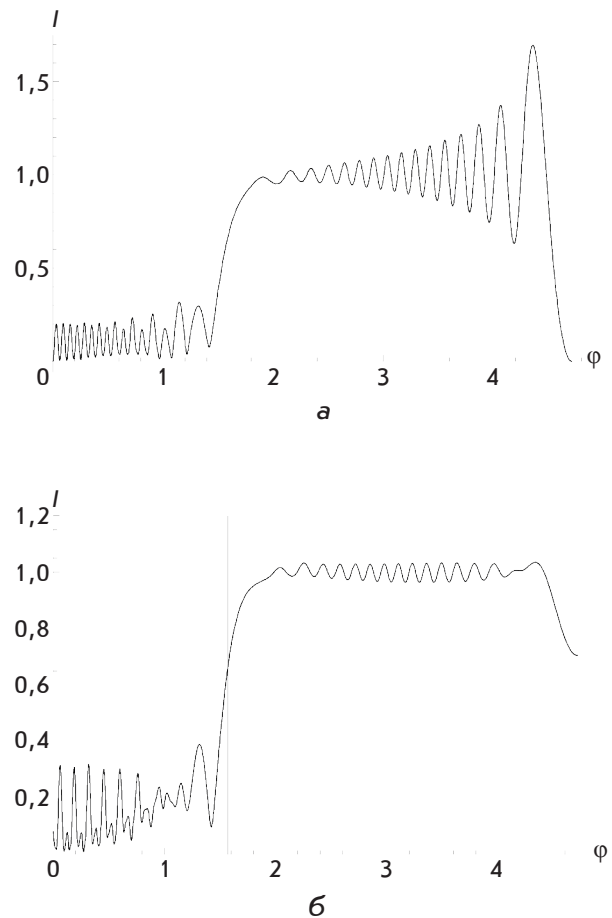


Рис. 2. Угловое распределение интенсивности для случая  $\rho = 50$ ;  $\gamma = \pi/2 - 0,05$  при дифракции на прямоугольном клине ТЕ волны (а) и ТМ волны (б)

Решение задачи описывается математической моделью (8), (11), (18). Прямой расчет с использованием выражения (8) потребовал учета не менее 150 членов ряда. Ниже представлены результаты численного расчета дифракции на клине с  $\delta = 0,876\ 543\ 21$  для ТЕ и ТМ волн (рис. 3). Характеристики дифрагирующих волн приведены для  $\rho = 30$ .

На рис. 3а показан вариант падения плоской ТЕ волны, имеющей волновой вектор, параллельный нижней грани клина. Здесь имеется зона интерференции с размахом амплитуды интенсивности от 0 до 3, зона падающей (прошедшей) волны с интенсивностью, близкой к 1, и зона дифракции вблизи нижней грани клина. Электромагнитное поле ТЕ волны отжимается от нижней грани и поэтому размах дифракционных максимумов достигает величины 1,7. Он несколько больше, чем в случае, когда имеется зона тени между краем прошедшей плоской волны и



нижней стенкой клина. На рис. 3б представлен вариант, аналогичный случаю на рис. 3а, только для ТМ волны. Здесь поле не обращается в ноль на нижней грани. Наблюдается эффект подавления дифракции вблизи нижней стенки клина.

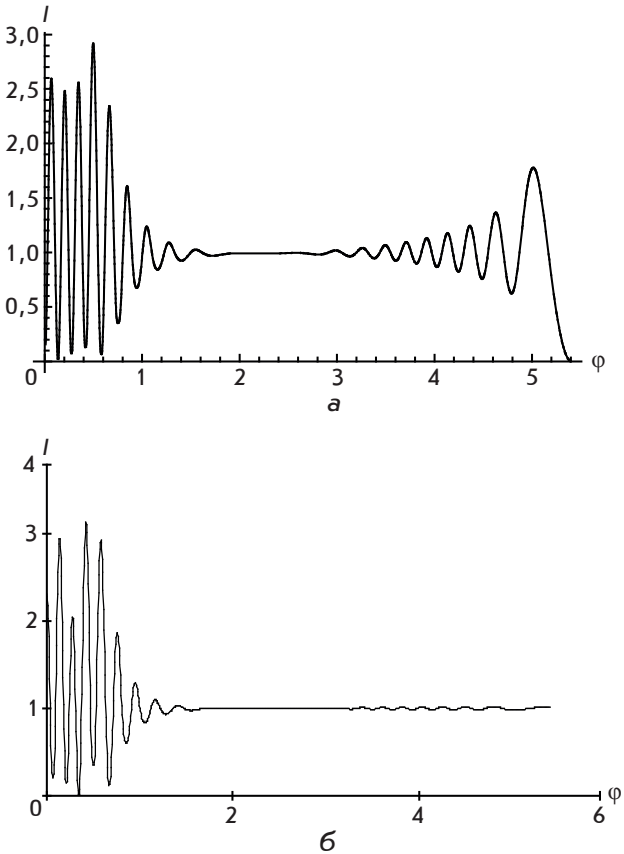


Рис. 3. Угловые распределения интенсивности ТЕ волны (а) и ТМ волны (б) при дифракции плоской волны на клине с углом  $\delta = 0,877$ ;  $\rho = 30$ ;  $\gamma = \pi - \delta$

Отметим, что сравнение результатов расчета для прямоугольного клина данным методом и методом интегрирования функций Ханкеля показало полное совпадение результатов в пределах погрешности счета.

Двумерные расчеты предоставляют возможность увидеть общую картину дифракции исходной волны, падающей на клин под произвольным углом. Рассматривается стационарная картина дифракции. Поэтому на двумерной плоскости вводится внешний сектор (пространство вне клина), который можно покрыть дугами концентрических окружностей и через равные углы провести радиусы. Точки пересечения радиусов и концентрических окружностей образуют полярную сетку, ограниченную сектором. Расчеты в рамках модели (8), (11),

(18) можно проводить на дуге каждой концентрической окружности последовательно, охватывая все большую площадь сектора.

Примеры двумерных расчетов интенсивности, выполненных данным методом, представлены на рис. 4. Стрелкой показано направление волнового вектора падающей плоской волны. На рис. 4а представлена дифракция ТЕ волны, а на рис. 4б — ТМ волны. Темным цветом показана область интерференции исходной волны с волной, отраженной от верхней грани клина. На рис. 4а для ТЕ волны в области, примыкающей к нижней грани клина, возникает сильная дифракция прошедшей волны, которая отчетливо видна на общей картине. Интересным обстоятельством является отсутствие заметной дифракции у прошедшей ТМ волны, что иллюстрирует рис. 4б. Таким образом, настраивая поляризацию падающей волны, можно снижать влияние дифракции на прошедшую волну. Данный эффект вполне можно использовать в прикладной оптике для подавления дифракции в некоторых классах оптических приборов.

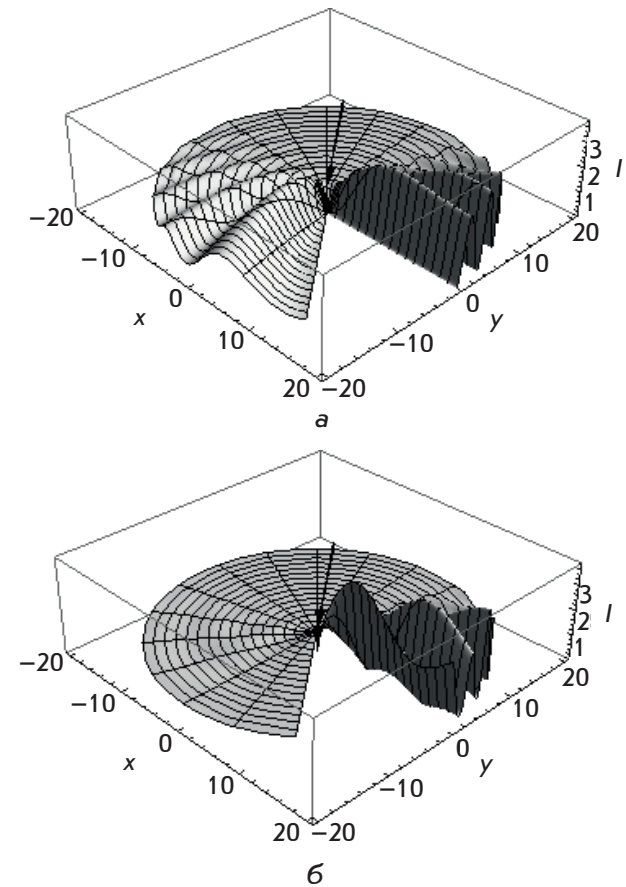


Рис. 4. Двумерные расчеты интенсивности ТЕ волны (а) и ТМ волны (б) для задачи дифракции плоской волны на клине с углом  $\delta = 0,877$ ;  $\gamma = \pi - \delta$

Расчеты дифракции на клине рассматривались также в [5].

Сравнение расчета функций  $W_p^D(\rho, \theta)$  и  $U_p^D(\rho, \theta)$ , полученных в рамках параболического приближения (15) и строгого решения уравне-

ния Гельмгольца (8), показывают, что небольшие отклонения параболического приближения от строгого решения возникают только в ближней зоне  $0 < \rho < 1$  (рис. 5). Эти отклонения не превышают нескольких процентов.

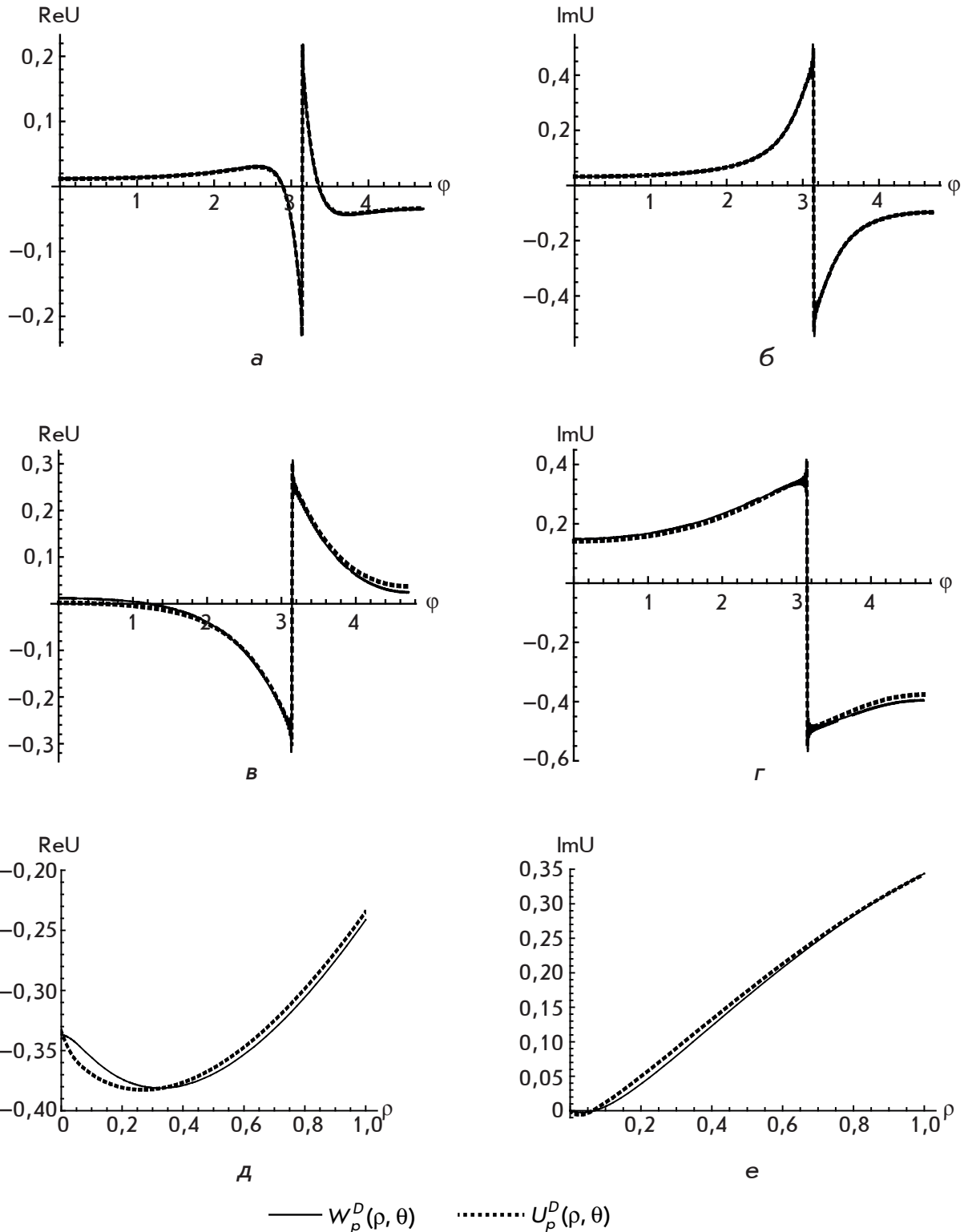


Рис. 5. Сравнение функций  $W_p^D(\rho, \theta)$  и  $U_p^D(\rho, \theta)$  для случаев  $\delta = \pi / 2, \rho = 20$  (а, б); 1 (в, г);  $\theta = \pi - 0,1$  (д, е)

Основным преимуществом параболического приближения является одномерное радиальное обыкновенное дифференциальное уравнение в методе разделения переменных, решение которого можно записать через интегралы Френеля. Задача о клине обладает строгим решением, что позволяет проверить пределы применимости метода, основанного на параболическом приближении. Как видим, приближенное решение совпадает со строгим решением в дальней зоне и отличается на несколько процентов от строгого решения в ближней зоне. В нуле, на бесконечности и на гранях клина решения совпадают. Результаты сравнения параболического приближения с решением строгой задачи данной работы согласуются с результатами сравнения на основе прямого численного расчета дифференциальных уравнений методом поперечной диффузии [21].

Таким образом, в данной работе выполнены одномерные и двумерные расчеты дифракции плоских ТЕ и ТМ волн на идеально проводящем клине в рамках строгой постановки и параболического приближения. Для прямоугольного клина разработана численная методика решения задачи дифракции, основанная на вычислении несобственного интеграла от

произведения тригонометрической функции и функции Ханкеля. Для клина с произвольным углом реализован численный метод, основанный на прямом численном суммировании рядов Фурье-Бесселя. Для прямоугольного клина оба подхода дают одинаковый результат. При расчетах в рамках параболического приближения реализован метод суммирования рядов Фурье-Френеля.

Проведен анализ двумерных распределений интенсивности для задачи дифракции плоских ТЕ и ТМ волн на идеально-проводящем клине. Сравнение задач дифракции плоской волны на клине, выполненных в рамках стационарного волнового уравнения (уравнения Гельмгольца) и параболического приближения, обнаружило отклонение приближенного решения задачи от точного решения, достигающее нескольких процентов в ближней зоне. Решение краевой задачи дифракции на клине в рамках параболического приближения в области одного отражения, рассмотренное в [25], может быть распространено на всю область углов падения. Показано, что параболическое приближение сводится к учету двух первых членов в разложении гиперболического косинуса в интегральном представлении строгого решения.

#### Список использованной литературы

1. Бабич В. М. Дифракция плоской волны на клине / В. М. Бабич, А. А. Мацковский // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2009. — Т. 369. — С. 5–15.
2. Беличенко В. П. Дифракция электромагнитных волн на клине с анизотропно проводящими гранями / В. П. Беличенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1987. — Т. 27. — № 6. — С. 889–897.
3. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М.: Наука, 1973. — 720 с.
4. Боровский А. В. Дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда / А. В. Боровский, А. Н. Бородин. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2012. — 64 с.
5. Боровский А. В. Дифракция на идеально клине с произвольным углом / А. В. Боровский, А. Л. Галкин // Краткие сообщения по физике ФИАН. — 2014. — № 1. — С. 13–21.
6. Боровский А. В. Математическая теория дифракции плоской волны на идеально проводящем клине / А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2013. — 109 с.
7. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны, радио и связь / Л. А. Вайнштейн. — М.: Радио и связь, 1990. — 440 с.
8. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М.: Физматгиз, 1959. — 628 с.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — 4-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
10. Гринберг Г. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г. Гринберг. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. — 727 с.
11. Залипаев В. В. Дифракция плоской волны на прямоугольной ступени в импедансной плоскости / В. В. Залипаев // Записки научных семинаров ПОМИ. — 1998. — Т. 250. — С. 97–108.
12. Зоммерфельд А. Оптика / А. Зоммерфельд. — М.: Иностран. лит., 1953. — 486 с.
13. Зотов А. В. Дифракция волн на клине в технических задачах / А. В. Зотов // Материалы 3-й конференции аспирантов и докторантов. — Челябинск: Изд-во Юж.-Урал. гос. ун-та, 2011. — Т. 2. — С. 113–116.
14. Курушин Е. П. Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах / Е. П. Курушин, Е. И. Нефедов, А. Т. Фиалковский. — М.: Наука, 1975. — 197 с.

15. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. — М. : Наука, 1982. — Т. 8. — 621 с.
16. Леонтович М. А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения / М. А. Леонтович, В. А. Фок // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1946. — Т. 16, № 7. — С. 557–573.
17. Лялинов М. А. Дифракция акустических и электромагнитных волн в клиновидных и конусовидных областях с граничными условиями импедансного типа : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / М. А. Лялинов. — СПб., 2004. — 298 с.
18. Малюжинец Г. Д. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней / Г. Д. Малюжинец // Доклады Академии наук СССР. — 1958. — Т. 121. — С. 436–439.
19. Малюжинец Г. Д. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. Ч. 1. Параболическое уравнение в лучевых координатах / Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн // Радиотехника и электроника. — 1961. — Т. 6, № 8. — С. 1247–1258.
20. Малюжинец Г. Д. Формула обращения для интеграла Зоммерфельда / Г. Д. Малюжинец // Доклады Академии наук СССР. — 1958. — Т. 118. — С. 1099–1103.
21. Попов А. В. Численное решение задачи о дифракции на клине методом поперечной диффузии / А. В. Попов // Акустический журнал. — 1969. — Т. 15, № 2. — С. 265–274.
22. Свешников А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — М. : Наука, 1974. — 319 с.
23. Теория рассеяния электромагнитных волн в угловых структурах / А. Ф. Крячко, В. М. Лихачев, С. Н. Смирнов, А. И. Сташкевич. — СПб. : Наука, 2009. — 194 с.
24. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
25. Уфимцев П. Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции / П. Я. Уфимцев ; пер. с англ. А. В. Капцова. — М. : Бином, 2012. — 372 с.
26. Фок В. А. Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела / В. А. Фок // Известия АН СССР. Серия Физическая. — 1946. — Т. 10, № 2. — С. 171–186.
27. Франк Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики / Ф. Франк, Р. Мизес. — М. ; Л. : ОНТИ, 1937. — 996 с.
28. Sommerfeld A. *Mathematische Theorie der Diffraction* / A. Sommerfeld // *Mathematische Annalen*. — 1896. — Vol. 47. — P. 317–374.

## References

1. Babich V. M., Matskovskii A. A. Diffraction of a plane wave on a wedge. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI — Proceedings of POMI scientific seminars*, 2009, vol. 369, pp. 5–15 (in Russian).
2. Belichenko V. P. Diffraction of electromagnetic waves by a wedge with anisotropically conductive sides. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki — The Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1987, vol. 27, no. 6, pp. 889–897 (in Russian).
3. Born M., Wolf E. *Principles of optics*. Oxford, Pergamon Press, 1969. (Russ. ed.: Born M., Volf E. *Osnovy optiki*. Moscow, Science Publ., 1973. 720 p.).
4. Borovsky A. V., Borodin A. N. *Difraktsionnyi integral Franka-Zommerfelda* [Frank-Sommerfeld diffraction integral]. Irkutsk, Baikal State University of Economics and Law Publ., 2012. 64 p.
5. Borovsky A. V., Galkin A. L. Diffraction by a perfectly conducting wedge with an arbitrary angle. *Kratkie soobshcheniya po fizike FIAN — Brief reports on Physics of Lebedev Physical Institute*, 2014, no. 1, pp. 13–21 (in Russian).
6. Borovsky A. V., Borodin A. N., Galkin A. L. *Matematicheskaya teoriya difraktsii ploskoi volny na idealno provodyashchem kline* [The mathematical theory of plane wave diffraction by a perfectly conducting wedge]. Irkutsk, Baikal State University of Economics and Law Publ., 2013. 109 p.
7. Vainshtein L. A. *Elektromagnitnye volny, radio i svyaz* [Electromagnetic waves, radio and communications]. Moscow, Radio and Communications Publ., 1990. 440 p.
8. Vekua I. N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 628 p.
9. Vladimirov V. S. *Urvneniya matematicheskoi fiziki* [Mathematical Physics Equations]. 4<sup>th</sup> ed. Moscow, Science Publ., 1981. 512 p.
10. Grinberg G. *Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskikh i magnitnykh yavlenii* [Selected issues of mathematical theory of electric and magnetic phenomena]. Moscow, Leningrad, AN SSSR Publ., 1948. 727 p.
11. Zalipaev V. V. Plane wave diffraction by a step discontinuity in an impedamce plane. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 1998, Vol. 250, pp. 97–108.
12. Zommerfeld A. *Optika* [Optics]. Moscow, Foreign Literature Publ., 1953. 486 p.
13. Zotov A. V. Diffraction of waves by a wedge in technical tasks. *Materialy 3-y konferentsii aspirantov i doktorantov* [Proceedings of the 3d conference of PhD students and candidates for a doctoral degree]. Chelyabinsk, South Ural State University Publ., 2011. Vol. 2. Pp. 113–116 (in Russian).

14. Kurushin E. P., Nefedov E. I., Fialkovskiy A. T. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na anizotropnykh strukturakh* [Diffraction of electromagnetic waves in anisotropic structures]. Moscow, Science Publ., 1975. 197 p.
15. Landau L. D., Lifshits E. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continua]. In *Teoreticheskaya fizika* [Theoretical physics]. Moscow, Science Publ., 1982. Vol. 8. 621 p.
16. Leontovich M. A., Fok V. A. Solution of the problem of electromagnetic waves propagation along the earth's surface by the method of parabolic equation. *Zhurnal eksperimentalnoi i teoreticheskoi fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1946, vol. 16, no. 7, pp. 557–573 (in Russian).
17. Lyalinov M. A. *Difraktsiya akusticheskikh i elektromagnitnykh voln v klinovidnykh i konusovidnykh oblastyakh s granichnymi usloviyami impedansnogo tipa. Dokt. Diss.* [Diffraction of acoustic and electromagnetic waves in wedge-shaped and cone-shaped areas with boundary conditions of impedance type. Doct. Diss.]. Saint Petersburg, 2004. 298 p.
18. Malyuzhinets G. D. Excitation, reflection and emission of surface waves on a wedge with given faces impedances. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1958, vol. 121, pp. 436–439 (in Russian).
19. Malyuzhinets G. D., Vaynshteyn L. A. Transverse diffusion in diffraction by an impedance cylinder of large radius. Part 1. Parabolic equation in radial coordinates. *Radiotekhnika i elektronika — Radio Engineering and Electronics*, 1961, vol. 6, no. 8, pp. 1247–1258 (in Russian).
20. Malyuzhinets G. D. Inversion formula for the Sommerfeld integral. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1958, 1958, vol. 118, pp. 1099–1103 (in Russian).
21. Popov A. V. Numerical solution of the problem of diffraction by a wedge by a transverse diffusion method. *Akusticheskiy zhurnal — The Acoustical Journal*, 1969, vol. 15, no. 2, pp. 265–274 (in Russian).
22. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [The equations of mathematical physics]. Moscow, Science Publ., 1972. 735 p.
23. Kryachko A. F., Likhachev V. M., Smirnov S. N., Stashkevich A. I. *Teoriya rasseyaniya elektromagnitnykh voln v uglovykh strukturakh* [The theory of scattering of electromagnetic waves in the angular structures]. Saint-Petersburg, Science Publ., 2009. 194 p.
24. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Mathematical Physics Equations]. Moscow, Science Publ., 1972. 735 p.
25. Ufimtsev P. Ya. *Teoriya difraktsionnykh kraevykh voln v elektrodinamike. Vvedenie v fizicheskuyu teoriyu difraktsii* [The theory of diffraction edge waves in electrodynamics. Introduction to the physical theory of diffraction]. Moscow, Binom Publ., 2012. 372 p.
26. Fok V. A. The field of a plane wave near the surface of a conducting body. *Izvestiya AN SSSR. Seriya Fizicheskaya — Izvestiya AN SSSR. Physics Series*, 1946, vol. 10, no. 2, pp. 171–186 (in Russian).
27. Frank F., Mizes R. *Differentsialnye i integralnye uravneniya matematicheskoi fiziki* [Differential and integral equations of mathematical physics]. Moscow, Leningrad, ONTI Publ., 1937. 996 p.
28. Sommerfeld A. *Mathematische Theorie der Diffraction. Mathematische Annalen*, 1896, vol. 47, pp. 317–374.

#### Информация об авторах

**Боровский Андрей Викторович** — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

**Галкин Андрей Леонидович** — доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова, 119991, г. Москва, ул. Вавилова, 38, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

#### Authors

**Borovsky Andrey Victorovich** — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor, Department of Informatics and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russia, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

**Galkin Andrey Leonidovich** — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Division Head, General Physics Institute of RAS n. a. A. M. Prokhorov, 38 Vavilov St., 119991, Moscow, Russia, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.